Obiectivele proiectului

1. Elaborarea si dezvoltarea unor metode integrale si hibride pentru solutionarea problemelor de camp electromagnetic in structuri cu corpuri in miscare si medii neliniare.

1.1. *Metodele hibride FEM-BEM.* Se discretizeaza cu metoda elementului finit (FEM) doar corpurile feromagnetice si cele in care se induc curenti turbionari, conditia de frontiera fiind o conditie mixta, data de matricea de rigiditate ce rezulta din metoda elementelor de frontiera (BEM). Miscarea se reflecta doar asupra conditiei de frontiera. Pentru structuri 2D, ecuatia integrala, pe frontiera, a potentialului vector este: $\alpha A(\boldsymbol{r}) = -\oint_{\partial\Omega} \frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}')}{R^2} A(\boldsymbol{r}')dl' + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{ln}\frac{1}{R}\frac{\partial A(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}dl' + A_0$ ....(3), unde A este potentialul vector; $\partial\Omega$ este frontiera corpurilor feromagnetice; α este unghiul solid sub care este vazuta o mica vecinatate a lui $\partial\Omega$ din punctul de observatie; ***r*, *r’*** sunt vectorii de pozitie al punctului de observatie, respectiv al punctului sursa; ***R*** = ***r*** - ***r***’; ***n’*** este versorul normalei exterioare; A_0 este potentialul vector dat de surse de camp externe. Pe corpurile feromagnetice scriem: $A = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i$, unde φ_k sunt functii de forma (de ex. elemente nodale), iar *N* este numarul acestor functii. Forma slaba a ecuatiei potentialului vector este: $-\oint_{\partial\Omega} \varphi_k \nu \frac{\partial A}{\partial n} dS + \int_{\Omega} grad\varphi_k \cdot \nu grad A d\Omega = \int_{\Omega} \varphi_k J d\Omega$, k=1,2,...,N ....(3’). Intre componentele tangentiale ale intensitatii campului magnetic (derivatele dupa normala ale potentialului) din domeniului exterior si interior exista relatia de trecere: $\frac{\partial A}{\partial n'} = -\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial A}{\partial n}$ ...(4). Frontiera este aproximata cu o linie poligonala, unde variatia potentialului este liniara, iar $\nu \frac{\partial A}{\partial n}$ este constant. Forma numerica a ecuatiei integrale este: $Z(rot\boldsymbol{A})_t + W\boldsymbol{A}_t = \boldsymbol{A}_0$ ...(5), care impreuna cu conditiile de trecere si ecuatia (3), formeaza sistemul de ecuatii din procedura hibrida FEM-BEM. Matricea sistemului de ecuatii are cateva dezavantaje: dimensiuni mari, pierde din proprietatea de matrice rara specifica metodelor FEM (liniile asociate frontierelor sunt pline) si nu este simetrica. **Propunem o metoda iterativa pentru solutionarea sistemului de ecuatii**:

- admitand cunoscuta valoarea $\frac{\partial A}{\partial n'}$ pe frontiera domeniului exterior, se determina valoarea lui *A* folosind relatia (5): $A = W^{-1}Z\frac{\partial A}{\partial n'} + W^{-1}A_0$ ...(6)
- se rezolva problema de camp din ecran, avand conditii frontiera Dirichlet. Matricea sistemului este cel mai bine conditionata, fiind rara, simetrica si diagonal dominanta. Se pot folosi tehnicile de matrice rare.
- in urma solutionarii problemei de camp din interiorul ecranului rezulta si valorile $\frac{\partial A}{\partial n}$ pe frontiera. Se corecteaza valorile $\frac{\partial A}{\partial n'}$ pentru problema exterioara, folosind relatia de trecere (4).

In cazul 3D, **propunem o noua ecuatie integrala**: $\alpha\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\oint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{n}'}{R} \times (\nabla' \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}'))dS' + \oint_{\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \times (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}'))dS' + \boldsymbol{A}_0$, care constituie conditia de frontiera pentru procedura FEM interioara. Se folosesc elementele de muchie si conditia de etalonare topologica.

In comparatie cu FEM, cateva din marile **avantajele ale proceduri de mai sus** sunt: pot fi luate in considerare structuri cu corpuri in miscare; nu pot exista forte parazite in aer (unde ecuatiile campului magnetic sunt verificate exact); nu este necesara introducerea unei frontiere artificiale; discretizarea se face doar pe domeniile feromagnetice.

1.2. *Ecuatia integrala a curentilor turbionari.* **Propunem utilizarea sistemelor de referinta locale, atasate corpurilor in miscare**, unde este valabila forma locala a legii inductiei electromagnetice pentru medii imobile si putem scrie: $\int_0^t \boldsymbol{E}d\tau = -\boldsymbol{A} + gradV$. In domeniul exterior corpurilor conductoare, este valabil regimul stationar si putem aplica formule B-S-L. In cazul 2D, unde avem si corpuri polarizate, propunem o noua forma a ecuatiei integrale a curentilor turbionari: $\rho \dot{J}(\boldsymbol{r}) + \frac{\mu_0}{2\pi}\int_\Omega J(\boldsymbol{r}')\,\mathbf{ln}\frac{1}{R}dS' = -A_0 - \frac{\mu_0}{2\pi}\int_\Omega \boldsymbol{k}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}'))\mathbf{ln}\frac{1}{R}dS' + C_l$, unde A_0 este potentialul vector dat de surse de camp externe si $\boldsymbol{M}$ este magnetizatia care poate sa provina din metoda polarizatiei, atunci cand avem medii feromagnetice neliniare, iar $\dot{\boldsymbol{J}} = \int_0^t \boldsymbol{J}(\tau)\mathbf{d}\tau$. Nucleul ecuatiei integrale $\mathbf{ln}\frac{1}{R}$ se modifica in timp. Se folosesc elemente de volum (de suprafata, in modelul 2D).

In structuri 3D, **propunem ecuatia** $\rho \dot{\boldsymbol{J}} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega_C}\frac{\boldsymbol{J}}{r}dv + gradV = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega_0}\frac{\boldsymbol{J}_0}{r}dv - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega_F}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{r}}{r^3}dv$, unde potentialul V este necunoscut. Se scrie $\dot{\boldsymbol{J}} = rot\boldsymbol{T}$, cu $\boldsymbol{T} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\boldsymbol{N}_j$, elementele de muchie ale corzilor, in graful muchiilor si se proiecteaza ecuatia integrala pe functiile $rot\boldsymbol{N}_k$, eliminand, in acest fel, potentialul V.

1.3. *Tratarea neliniaritatii.* Mediile feromagnetice, cu relatia constitutiva $\boldsymbol{H} = \mathbf{F}(\boldsymbol{B})$ se inlocuiesc cu medii liniare avand relatia constitutiva $\boldsymbol{B} = \mu(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$. Magnetizatiile $\boldsymbol{M}$ sunt corectate iterativ in functie de inductia magnetica $\boldsymbol{B}$. Pentru mediul de calcul se poate alege permeabilitatea $\mu = \mu_0$. Mediul fiind liniar si omogen din punct de vedere magnetic, rezolvarea unei probleme de camp electromagnetic, in cadrul unei iteratii, se poate face prin solutionarea ecuatiei integrale a densitatii de curent. Se utilizeaza sistemele de referinta ale corpurilor aflate in miscare. In termenul liber al ecuatiei integrale apare si magnetizatia $\boldsymbol{M}$. Nucleele acestor ecuatii integrale sunt functii de timp.

2. Calculul fortelor

Forta de natura magnetica se calculeaza cu formula: $\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu_0}\oint_\Sigma\left[(\boldsymbol{nB})\boldsymbol{B} - \boldsymbol{n}\frac{B^2}{2}\right]dA$, unde suprafata de integrare Σ inconjoara corpul de interes. Notam cu $\boldsymbol{J}_k$ densitatea de curent uniforma din subdomeniul conductor k, $k=1,...,n_C$ si cu $\boldsymbol{M}_k$ magnetizatia uniforma din subdomeniul feromagnetic poliedral ω_k, $k=1,...,n_F$. Putem aplica formulele B-S-L si **avem noile formul**e

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0}{16\pi^2}\sum_{j=1}^{n_j}\int_{\sigma_j}\left[\left(\boldsymbol{n}_j\sum_{k=1}^{n_C}\boldsymbol{J}_k\times\boldsymbol{A}_{kj} + \boldsymbol{n}_j\sum_{k=1}^{n_F}\boldsymbol{M}_k\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{C}}}_{kj} + \boldsymbol{n}_j\boldsymbol{D}_j\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n_C}\boldsymbol{J}_k\times\boldsymbol{A}_{kj} + \sum_{k=1}^{n_F}\boldsymbol{M}_k\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{C}}} + \boldsymbol{D}_j\right) - \frac{\boldsymbol{n}_j}{2}\left(\sum_{k=1}^{n_C}\boldsymbol{J}_k\times\boldsymbol{A}_{kj} + \sum_{k=1}^{n_F}\boldsymbol{M}_k\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{C}}}_{kj} + \boldsymbol{D}_j\right)^2\right]dA_j,$$

unde: $\boldsymbol{A}_{kj} = \oint_{\partial\omega_k}\frac{\boldsymbol{n}_k}{r}dA$; $\overline{\overline{\boldsymbol{C}}}_{kj} = \oint_{\partial\omega_k}\frac{(\boldsymbol{R};\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n})}{r^3}dA$;

$\boldsymbol{D}_j = \sum_{k=1}^{n} i_k \oint_{\Gamma_k}\frac{\boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$. Pentru corpuri in miscare, o parte din termenii $\boldsymbol{A}_{kj}$,$\boldsymbol{C}_{kj}$ *si* $\boldsymbol{D}_j$ trebuie recalculati, si anume acei termeni care se refera la suprafete S si corpuri conductoare sau feromagnetice care se deplaseaza unele fata de celelalte.

Pentru fortele de natura electrica, cum ar fi, de exemplu, cele ce apar in traiectoriile fascicolelor de electroni sau in separatoarele electrice, se pot folosi formulele densitatilor locale ale fortelor.

3. Rezolvarea ecuatiei de echilibru dinamic

Forta de natura electromagnetica se deduce prin rezolvarea unei complicate probleme de camp electromagnetic cuasistationar. Solutia problemei de camp depinde de pozitia si viteza corpului. De cele mai multe ori trebuiesc luate in considerare mai multe grade de libertate. Problema este deci neliniara si un algoritm numeric de solutionare a acesteia implica asigurarea unor conditii de stabilitate de procedura.

Este prezentat in continuare modul de abordare a acestui obiectiv. Sa admitem un caz simplu, cu un singur grad de libertate si fara frecari de natura mecanica. Ecuatia de echilibru dinamic este: $m\frac{dv}{dt} = F(x,v)$ ...(7), $v = \frac{dx}{dt}$.

Este propus un algoritm iterativ. Admitem ca in intervalul de timp [$t,t+\Delta t$] miscarea este uniform accelerata. Forma numerica a ecuatiilor de mai sus este: $m\dfrac{v^{(p+1)}(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\tilde{F}^{(p)}$, si deci: $v^{(p+1)}(t+\dfrac{\Delta t}{2})=\dfrac{v^{(p+1)}(t+\Delta t)+v(t)}{2}$.

Apoi $x^{(p+1)}(t+\Delta t)=x(t)+v^{(p+1)}(t+\dfrac{\Delta t}{2})\Delta t$ si $x^{(p+1)}(t+\dfrac{\Delta t}{2})=x(t)+\dfrac{v^{(p+1)}(t+\Delta t)+3v(t)}{8}\Delta t$. Tinand cont de faptul ca domeniile conductoare au fost impartite in n subdomenii tetraedrale ω_k in care densitatea de curent $\boldsymbol{J}_k$ este presupusa constanta, avem: $\boldsymbol{B}=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{J}_k\times\boldsymbol{D}_k$, unde $\boldsymbol{D}_k=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{\omega_k}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}dv$ sau $\boldsymbol{D}_k=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\oint_{\partial\omega_k}\dfrac{\boldsymbol{n}}{r}dA$. Se ia valoarea medie a fortei pe intervalul de timp [$t,t+\Delta t$]: $\tilde{\boldsymbol{F}}=\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_{t}^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}dt$. Admitand ca in intervalul de timp [$t,t+\Delta t$] miscarea este uniform accelerata si cunoscuta la iteratia *(p)*, densitatea de curent se poate calcula in ipoteza unei traiectorii impuse. Pasul de timp utilizat la determinarea densitatii de curent este diferit de cel utilizat la ecuatia de echilibru dinamic. Se poate folosi o procedura Crank-Nicholson.

4. Stabilitatea traiectoriei

Daca dorim sa studiem stabilitatea *globala* fata de traiectoria normala, atunci ar trebui ca la orice moment sa producem o perturbare, adica in membrul drept al ecuatiei (7) sa adaugam o forta ce actioneaza scurt timp si sa constatam ca noua traiectorie tinde asimptotic catre traiectoria normala (Fig. 1). Ar trebui rezolvate o multime de probleme complexe privind traiectoriile. Se poate face o simplificare substantiala a analizei stabilitatii traiectoriei, analizand stabilitatea *locala*. Intr-un punct al traiectoriei, presupusa cunoscuta, se face o abatere arbitrar de mica de la traiectorie si, presupunand ca avem aceeasi viteza, se determina forta de natura electromagnetica. Daca aceasta forta tinde sa readuca corpul pe traiectoria normala, atunci spunem ca avem stabilitate locala. De exemplu, pentru forta de natura magnetica avem relatia: $\delta\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{\mu_0}\displaystyle\oint_{\partial D_0}\left(\boldsymbol{B}(\delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{n})+\delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n})-\delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\right)dA$, unde $\boldsymbol{B}$ este calculat in punctul traiectoriei normale iar $\delta\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\sum_{k=1}^{N_c}\left(\displaystyle\int_{D_k}\dfrac{\delta\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{r^3}dv\right)+\sum_{k=1}^{N_c}\left(\displaystyle\int_{D_k}\boldsymbol{J}\times\left(\dfrac{\delta\boldsymbol{d}}{r^3}-3\dfrac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\delta\boldsymbol{d})}{r^5}\right)dv\right)\right]$, unde $\delta\boldsymbol{d}$ este deplasarea de la punctul de pe traiectorie. Ecuatia integrala a densitatii de curent diferenta este:

$$\rho\delta\boldsymbol{J}+\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\sum_{k=1}^{N_c}\left(\int_{D_k}\frac{\delta\boldsymbol{J}}{r}dv\right)+\sum_{k=1}^{N_c}\left(\int_{D_k}\frac{(\delta\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{J})\times\boldsymbol{r}}{r^3}dv\right)\right]+gradV=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega_0}\frac{(\delta\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{J}_0)\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathbf{d}v$$

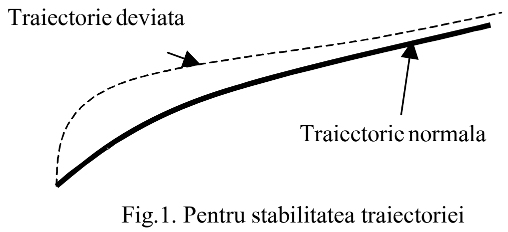

Fig.1. Pentru stabilitatea traiectoriei

Daca mica abatere de la traiectoria normala se face pe directia $\boldsymbol{u}$, atunci $\delta\boldsymbol{d}=\boldsymbol{u}\delta s$. In relatiile de mai sus se inlocuiesc micile variatii cu derivatele in raport cu s. $\dfrac{\delta\boldsymbol{F}}{\delta s}=\dfrac{1}{\mu_0}\displaystyle\oint_{\partial D_0}\left(\boldsymbol{B}(\dfrac{\delta\boldsymbol{B}}{\delta s}\boldsymbol{n})+\dfrac{\delta\boldsymbol{B}}{\delta s}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n})-\dfrac{\delta\boldsymbol{B}}{\delta s}\boldsymbol{B}\right)dA$,

$\frac{\delta \boldsymbol{B}}{\delta s} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\sum_{k=1}^{N_c}\left(\int_{D_k} \frac{\left(\frac{\delta \boldsymbol{J}}{\delta s}\right)\times \boldsymbol{r}}{r^3} dv\right) + \sum_{k=1}^{N_c}\left(\int_{D_k} \boldsymbol{J}\times\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r^3} - 3\frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{ru})}{r^5}\right) dv\right)\right]$. Ecuatia derivatei in raport cu s a densitatii integrale de curent este: $\rho\left(\frac{\delta \boldsymbol{J}}{\delta s}\right)^{\bullet} + \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\sum_{k=1}^{N_c}\left(\int_{D_k} \frac{\left(\frac{\delta \boldsymbol{J}}{\delta s}\right)}{r} dv\right) + \sum_{k=1}^{N_c}\left(\int_{D_k} \frac{(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{J})\times\boldsymbol{r}}{r^3} dv\right)\right] + gradV = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega_0} \frac{(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{J}_0)\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathbf{d}v$. Rezolarea ecuatiei de mai sus se face pe micul interal de timp $[t, t+\sigma]$. Pentru simplitate, am presupus ca mediul este liniar, deci lipseste magnetizatia $\boldsymbol{M}$.

Metodologia cercetarii

Cercetarea se va orienta pe 5 directii de ceretare fundamentala:

1) Elaborarea si dezvoltarea unor metode integrale si hibride pentru solutionarea problemelor de camp electromagnetic. Vor fi luate in considerare si structuri cu corpuri in miscare si medii neliniare. Vor fi solutionate probleme stationare de camp electric si magnetic precum si probleme de curenti turbionari. Vor fi stabilite formule si proceduri de calcul al campului electromagnetic in zonele cu aer, unde campul electromagnetic este continuu si indefinit derivabil. Alegand structuri simple, in care se poate obtine solutia analitica, se vor verifica solutiile obtinute.

2) Metode de calcul al fortelor de natura electromagnetica prin utilizarea rezultatelor metodelor integrale si hibride. Se folosesc fluxul tensorului Maxwell, atunci cand determinam fortele magnetice exercitate asupra corpurilor in miscare, sau formulele fortelor locale, atunci cand determinam traiectoriile particulelor incarcate electric.

3) Metode de solutionare numerica a ecuatiilor de echilibru dinamic. Utilizand metode integrale sau hibride, corectia fortei de natura electromagnetica se face fara reconstructia mesh-ului.

4) Metode de analiza numerica a stabilitatii traiectoriilor.

5) Algoritmi si programe de calcul.

Echipa de cercetare cuprinde 3 profesori cu vasta experienta in domeniul electromagnetismului, 2 tineri care au sustinut recent tezele de doctorat si un doctorand. In consecinta, vor fi formate 3 echipe de lucru de cate doi membri coordonate de cei 3 profesori. In activitatea acestor echipe vor fi cooptati si alti tineri doctoranzi sau chiar studenti, insa raspunderea activitatii de cercetare o vor avea coordonatorii echipelor.

Rapoarte de cercetare ordinare si extraordinare vor fi analizate cu prezenta intregului colectiv de 6 persoane, legatura dintre activitatile echipei fiind responsabilitate directorului de proiect.

Rezultatele vor fi raportate in reviste cotate **ISI (cel putin 6 articole)** si vor fi comunicate la conferinte stiintifice cu recenzenti.